

Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Постановка задачи

Постановка задачи решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) заключается в нахождении такого набора значений неизвестных, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное числовое равенство. При этом требуется определить, является ли система совместной (имеющей хотя бы одно решение), и если да — найти её решения.

Общая форма записи системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные числа; a_{ij} — коэффициенты при неизвестных; b_i — свободные члены.

В матричной форме систему можно записать как $Ax = b$, где A — матрица коэффициентов системы, x — вектор-столбец неизвестных, b — вектор-столбец свободных членов.

Некоторые ключевые понятия:

- Решение системы — совокупность чисел, при подстановке которых все уравнения системы становятся тождествами.

- Совместная система — имеет хотя бы одно решение; несовместная — не имеет решений.

- Определённая система — имеет единственное решение; неопределённая — имеет более одного решения.

- Однородная система — все свободные члены равны нулю; неоднородная — если есть ненулевые свободные члены.

Методы решения СЛАУ делятся на две основные группы:

1. Прямые (точные) — позволяют получить решение за конечное число арифметических операций. Если все операции выполняются точно (без ошибок округления), решение будет точным. К ним относятся, например, метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод, метод прогонки, разложение Холецкого.

2. Итерационные — основаны на построении последовательности приближений (итераций), начиная с начального приближения. Само приближённое решение является результатом вычислений после конечного числа итераций. Примеры итерационных методов: метод Якоби (метод простой итерации), метод Гаусса — Зейделя, метод сопряжённых градиентов.

При решении СЛАУ важно учитывать:

- Ранг матрицы — максимальное число линейно независимых строк матрицы. Для совместимости системы необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы был равен рангу расширенной матрицы (теорема Кронекера — Капелли).

- Обусловленность системы — свойство системы, которое влияет на устойчивость и точность решения.

Для решения СЛАУ используются как аналитические методы, так и численные, в том числе с применением специализированного программного обеспечения (например, пакетов LAPACK, BLAS, Algebrator и др.